Diseño geométrico horizontal: planta

ING° M. LAJO G.

3.1 CONCEPTOS

De una manera *general* una *carretera* se puede concebir como un sistema que logra integrar beneficios, conveniencia, satisfacción y seguridad a sus usuarios; que conserva, aumenta y mejora los recursos naturales de la tierra, el agua y el aire; y que colabora en el logro de los objetivos del desarrollo regional, agrícola, industrial, comercial, residencial, recreacional y de salud pública.

En forma *particular*, el *diseño geométrico de carreteras* es el proceso de correlación entre sus elementos físicos y las características de operación de los vehículos, mediante el uso de las matemáticas, la física y la geometría. En este sentido, la carretera queda geométricamente definida por el trazado de su eje en planta y en perfil y por el trazado de su sección transversal.

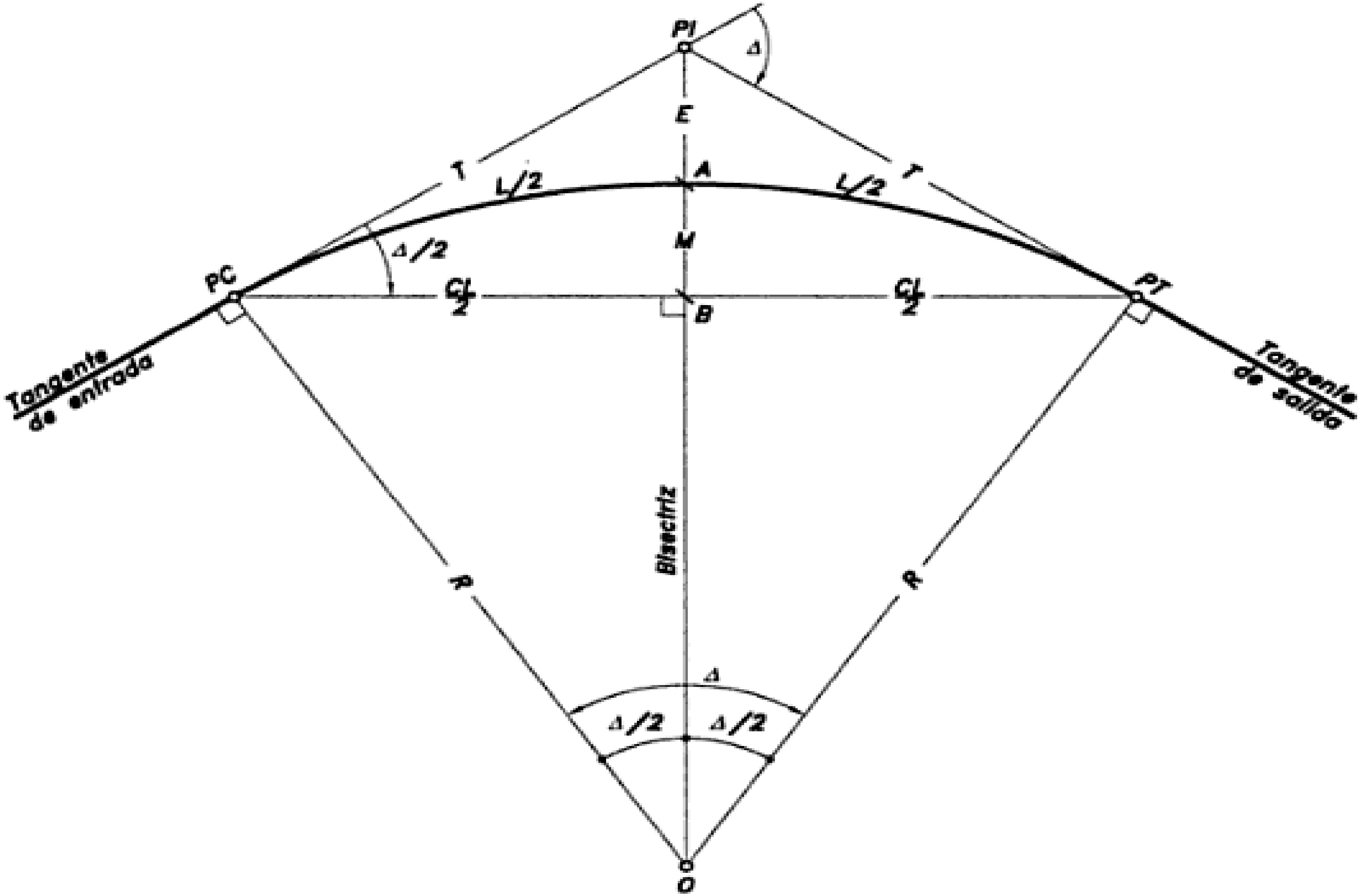
El *diseño geométrico en planta* de una carretera, o *alineamiento horizontal*, es la proyección sobre un plano horizontal de su eje real o espacial. Dicho eje horizontal está constituido por una serie de tramos rectos denominados *tangentes*, enlazados entre sí por *curvas*.

CURVAS CIRCULARES SIMPLES

Las *curvas horizontales circulares simples* son arcos de circunferencia de un solo radio que unen dos tangentes consecutivas, conformando la proyección horizontal de las curvas reales o espaciales. Por lo tanto, las curvas del espacio no necesariamente son circulares.

Elementos geométricos que caracterizan una curva circular simple

En la Figura 3.1 aparecen los diferentes elementos geométricos de una curva circular simple. Tomando el sentido de avance de izquierda a derecha, dichos elementos son:



G

Elementos geométricos de una curva circular simple

PI = Punto de intersección de las tangentes o vértice de la curva.

PC = Principio de curva: punto donde termina la tangente de entrada y empieza la curva.

PT = Principio de tangente: punto donde termina la curva y empieza la tangente de salida.

O = Centro de la curva circular.

Δ = Ángulo de deflexión de las tangentes: ángulo de deflexión principal. Es igual al ángulo central subtendido por el arco *PC.PT*.

R = Radio de la curva circular simple.

T = Tangente o subtangente: distancia desde el *PI* al *PC* o desde el *PI* al *PT*.

L = Longitud de curva circular: distancia desde el *PC* al *PT* a lo largo del arco circular, o de un polígono de cuerdas.

CL = Cuerda larga: distancia en línea recta desde el *PC* al *PT*.

E = Externa: distancia desde el *PI* al punto medio de la curva *A*.

M = Ordenada media: distancia desde el punto medio de la curva *A* al punto medio de la cuerda larga *B*.

Expresiones que relacionan los elementos geométricos

T en función de *R* y *Δ*:

En el triángulo rectángulo *O.PC.PI*, se tiene:

$$tan\frac{\Delta}{2}=\frac{PC.PI}{O.PC}=\frac{T}{R}$$, de donde,

$$T=R\,tan\frac{\Delta}{2}$$

R en función de *T* y *Δ*:

$$R=\frac{T}{tan\frac{\Delta}{2}}$$

CL en función de *R* y *Δ*:

En el triángulo rectángulo *O.B.PC*, se tiene:

$$sen\frac{\Delta}{2}=\frac{B.PC}{O.PC}=\frac{\frac{CL}{2}}{R}$$, de donde,

$$CL=2R\,sen\frac{\Delta}{2}$$

E en función de R y Δ:

En el triángulo rectángulo $O.PC.PI$, se tiene:

$$\cos\frac{\Delta}{2}=\frac{O.PC}{O.PI} \quad , \; O.PI = OA + A.PI = R + E$$

$$\cos\frac{\Delta}{2}=\frac{R}{R+E} \quad \text{, de donde,}$$

$$E = R\left(\frac{1}{\cos\frac{\Delta}{2}}-1\right)$$

E en función de T y Δ:

Reemplazando la ecuación (3-2) en la ecuación (3-4), se tiene:

$$E=\left(\frac{T}{\tan\frac{\Delta}{2}}\right)\left(\frac{1}{\cos\frac{\Delta}{2}}-1\right) \quad \text{, pero, } \tan\frac{\Delta}{2}=\frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta}{2}}{\cos\frac{\Delta}{2}}$$

$$E=\left(\frac{T\cos\frac{\Delta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\Delta}{2}}\right)\left(\frac{1-\cos\frac{\Delta}{2}}{\cos\frac{\Delta}{2}}\right)$$

$$E=\left(\frac{T}{\operatorname{sen}\frac{\Delta}{2}}\right)\left(1-\cos\frac{\Delta}{2}\right)$$

También se sabe que,

$sen\, 2\Delta = 2\, sen\, \Delta \cos \Delta$, entonces, $sen \frac{\Delta}{2} = 2\, sen \frac{\Delta}{4} \cos \frac{\Delta}{4}$

$\cos 2\, \Delta = 2 \cos^2 \Delta - 1$, entonces, por lo tanto,

$$E = \left(\frac{T}{2\, sen \frac{\Delta}{4} \cos \frac{\Delta}{4}} \right) \left(1 - 2 \cos^2 \frac{\Delta}{4} + 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{T}{sen \frac{\Delta}{4} \cos \frac{\Delta}{4}} \right) (2) \left(1 - \cos^2 \frac{\Delta}{4} \right)$$

$$E = \left(\frac{T}{sen \frac{\Delta}{4} \cos \frac{\Delta}{4}} \right) \left(1 - \cos^2 \frac{\Delta}{4} \right)$$, pero, entonces,

$$E = \left(\frac{T}{sen \frac{\Delta}{4} \cos \frac{\Delta}{4}} \right) \left(sen^2 \frac{\Delta}{4} \right) = \frac{T\, sen \frac{\Delta}{4}}{\cos \frac{\Delta}{4}}$$, esto es,

$$E = T \tan \frac{\Delta}{4}$$

M en función de *R* y Δ:

En el triángulo rectángulo *O.B.PC*, se tiene:

$$\cos\frac{\Delta}{2} = \frac{OB}{O.PC} = \frac{OA - AB}{O.PC} = \frac{R - M}{R}$$, de donde,

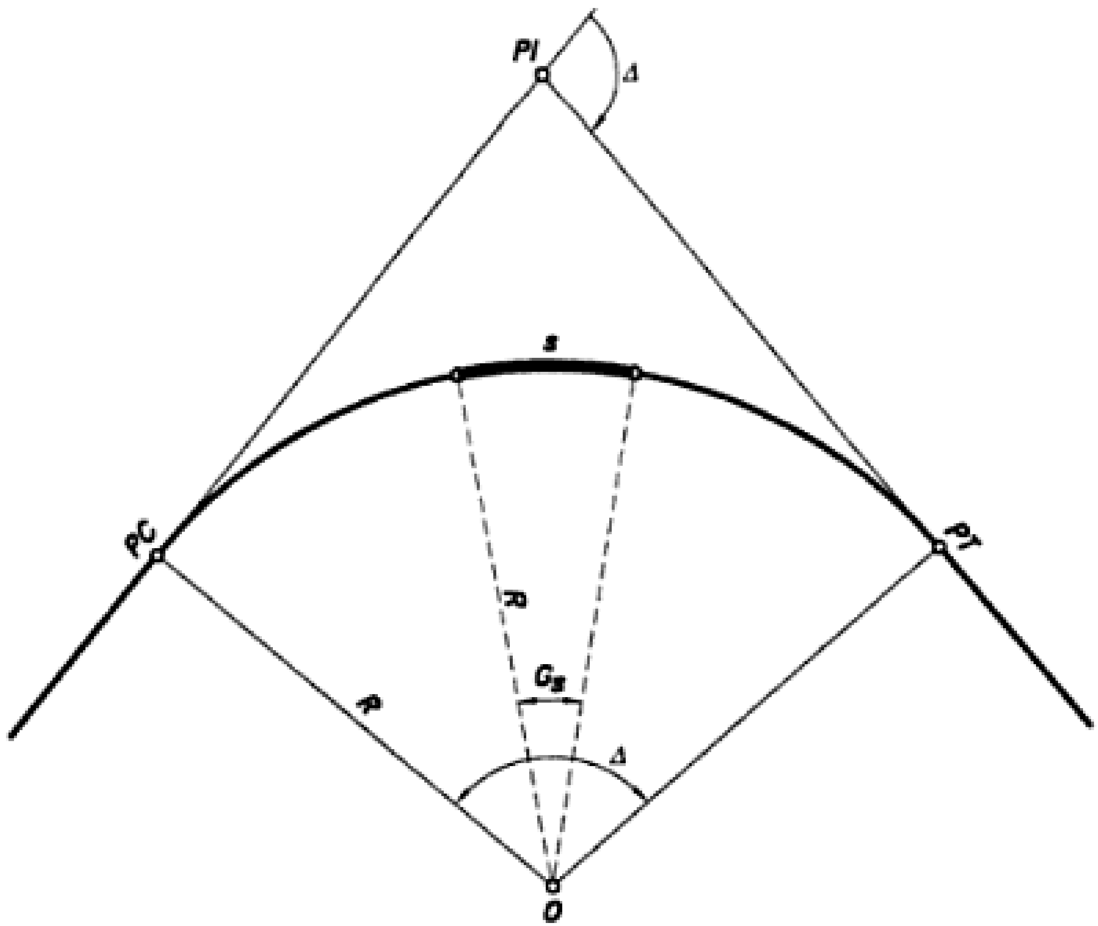
$$M = R\left(1 - \cos\frac{\Delta}{2}\right)$$

Expresión de la curvatura de una curva circular simple

La curvatura de un arco circular se fija por su radio *R* o por su grado *G*. Se llama *grado de curvatura* *G* al valor del ángulo central subtendido por un *arco* o *cuerda* de determinada longitud, escogidos como *arco unidad* *s* o *cuerda unidad* *c*. En nuestro medio, el arco unidad o la cuerda unidad usualmente es de 5, 10 y 20 metros.

❶ SISTEMA ARCO-GRADO

En este caso, según la Figura 3.2, el ángulo central G_s es subtendido por un arco unidad s.



Curvatura por el sistema arco-grado

Relacionando ángulos centrales con arcos, se tiene que:

$$\frac{G_s}{s} = \frac{360^\circ}{2\pi R}$$, de donde,

$$G_s = \frac{180^\circ s}{\pi R}$$

Para este sistema, la longitud de la curva L_s, es la del arco circular entre sus puntos extremos *PC* y *PT*.

Igualmente, relacionando arcos con ángulos centrales, se puede plantear que:

$$\frac{L_s}{\Delta} = \frac{s}{G_s}$$, de donde,

$$L_s = \frac{s\Delta}{G_s}$$

Reemplazando la ecuación (3-7) en la (3-8), se tiene,

$$L_s = \frac{s\Delta}{\frac{180^\circ s}{\pi R}}$$, esto es,

$$L_s = \frac{\pi R \Delta}{180^\circ}$$

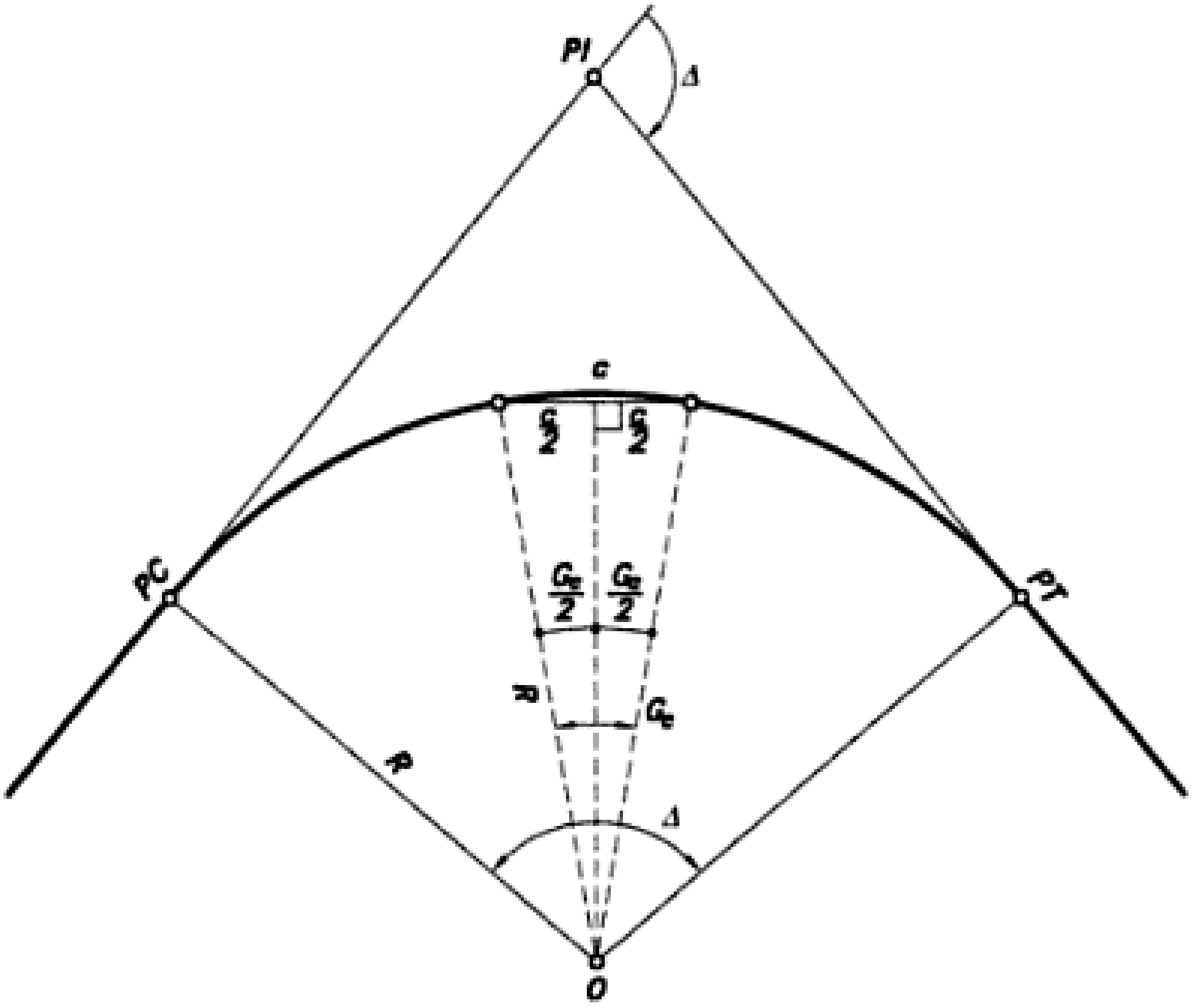
❷ SISTEMA CUERDA-GRADO

En este caso, según la Figura 3.3, el ángulo central G_c es subtendido por una cuerda unidad c.

En uno de los dos triángulos formados, se tiene:

$$sen\frac{G_c}{2}=\frac{\frac{c}{2}}{R}$$, de donde,

$$G_c = 2\, arcsen\frac{c}{2R} \qquad (3\text{-}10)$$



Curvatura por el sistema cuerda-grado

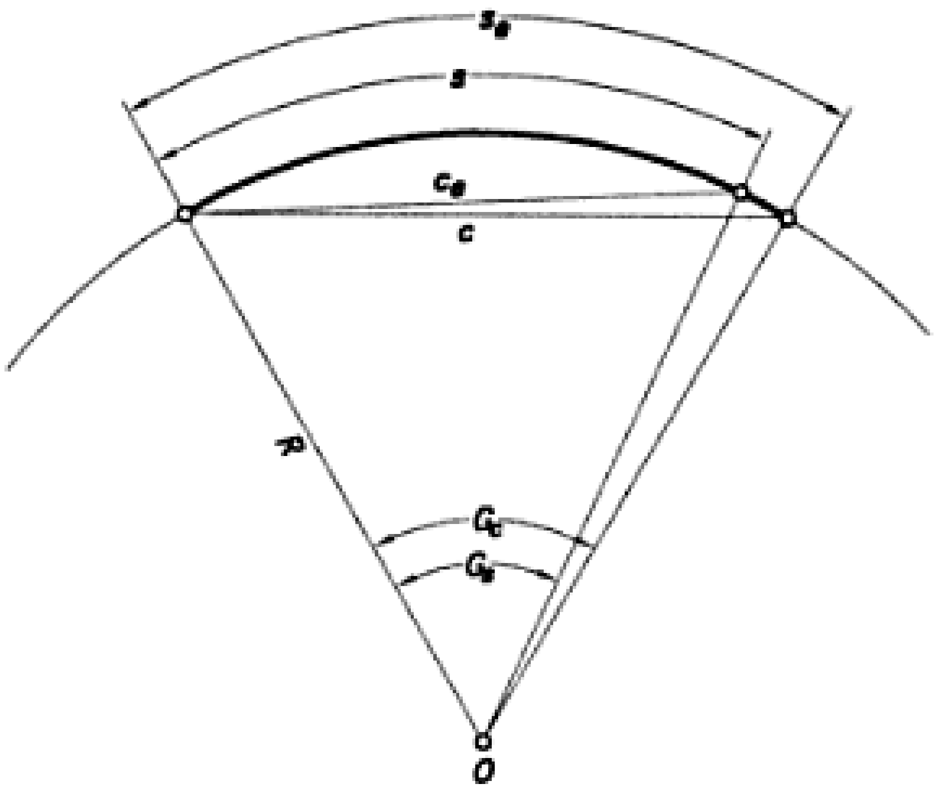
Para este sistema, la longitud de la curva L_c, es la de una poligonal inscrita en ella desde el *PC* al *PT*, cuyos lados son cuerdas. De esta manera, si se relacionan cuerdas a ángulos centrales, se puede plantear que:

$$\frac{L_c}{\Delta} = \frac{c}{G_c}$$, de donde,

$$L_c = \frac{c\Delta}{G_c}$$

<u>EJEMPLO 3.1: Relación entre los sistemas arco-grado y cuerda-grado</u>

Mediante este ejemplo, se explica la relación que existe entre los sistemas arco-grado y cuerda-grado. Para tal efecto, supóngase que se tiene un ángulo de deflexión principal $\Delta = 120°$ y un radio $R = 42m$.



Relación entre los sistemas arco-grado y cuerda-grado

Al tomar como arco unidad $s=10m$, según la ecuación (3-7), el grado de curvatura G_s es:

$$G_s = \frac{180^\circ s}{\pi R} = \frac{180^\circ (10)}{\pi (42)} = 13^\circ\ 38'\ 30.67''$$

La *cuerda equivalente* c_e al arco $s=10m$ es:

$$c_e = 2R \operatorname{sen} \frac{G_s}{2} = 2(42) \operatorname{sen} \frac{13^\circ\ 38'\ 30.76''}{2} = 9.976m < s = 10m$$

Como puede observarse la cuerda equivalente c_e es 24 mm más corta.

Si ahora se toma como cuerda unidad el valor de $c=10m$, según la ecuación (3-10), el grado de curvatura G_c es:

$$G_c = 2 \operatorname{arcsen} \frac{c}{2R} = 2 \operatorname{arcsen} \frac{10}{2(42)} = 13^\circ\ 40'\ 27.42''$$

El *arco equivalente* s_e a la cuerda $c=10m$ es:

$$s_e = \frac{\pi R G_c}{180^\circ} = \frac{\pi(42)(13^\circ\ 40'\ 27.42'')}{180^\circ} = 10.024m > c = 10m$$

Puede observarse que el arco equivalente s_e es 24 mm más largo.

La longitud de la curva por el sistema arco L_s, según la ecuación (3-8), es:

$$L_s = \frac{s\Delta}{G_s} = \frac{10(120^\circ)}{13^\circ\ 38'\ 30.67''} = 87.965m$$

De igual manera, la longitud de la curva por el sistema cuerda L_c, según la ecuación (3-11), es:

$$L_c = \frac{c\Delta}{G_c} = \frac{10(120^\circ)}{13^\circ\ 40'\ 27.42''} = 87.756m < L_s$$

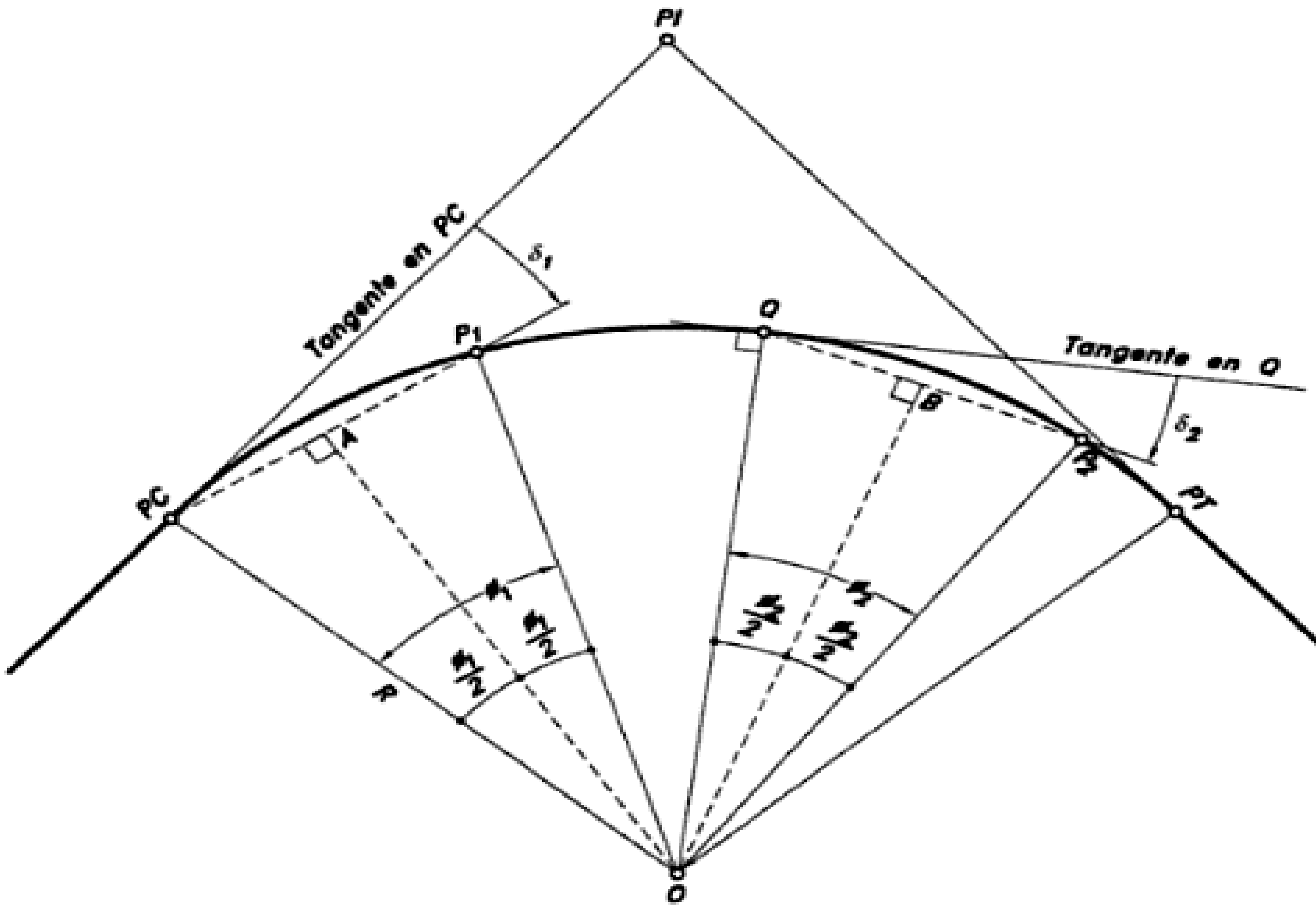
La longitud de la curva por el sistema cuerda equivalente L_{ce}, es:

$$L_{ce} = \frac{c_e \Delta}{G_s} = \frac{9.976(120^\circ)}{13^\circ\ 38'\ 30.67''} = 87.753m$$

Obsérvese que L_c es prácticamente lo mismo que L_{ce}. Esto quiere decir, que una curva calculada por el arco puede ser localizada con cualquier cuerda, a excepción de que cualquier ajuste que se haga se debe realizar sobre la longitud calculada por la cuerda y no por el arco. Obviamente, el abscisado que prevalece a partir del *PT*, es el del sistema arco. Por lo tanto, para que las abscisas, por ejemplo a cada 10 metros, sobre la curva coincidan con las del sistema arco, y si la localización se realiza por cuerdas, se debe utilizar la cuerda equivalente.

Deflexión de una curva circular simple

Se denomina *ángulo de deflexión* δ de una curva, al ángulo formado entre cualquier línea tangente a la curva y la cuerda dirigida desde el punto de tangencia a cualquier otro punto *P* sobre la curva, tal como lo muestra la Figura 3.5, para el ángulo de deflexión δ_1 correspondiente a la tangente en el *PC* y el punto P_1, y el ángulo de deflexión δ_2 correspondiente a la tangente en el punto *Q* y el punto P_2.



Concepto de ángulo de deflexión

Por un teorema de la geometría se sabe que el ángulo semiinscrito δ es igual a la mitad del ángulo central φ. Esto es, en general:

$$\delta = \frac{\varphi}{2}$$

La anterior expresión de igualdad de ángulos se puede comprobar en la figura anterior, pues los lados que forman los ángulos δ_1 y $\varphi_1/2$ son perpendiculares entre sí. Así por ejemplo:

$$\delta_1 = \frac{\varphi_1}{}$$

Puesto que el lado *PC.PI* es perpendicular al lado *O.PC* y el lado $PC.P_1$ perpendicular al lado *OA*.

Igualmente,

$$\delta_2 = \frac{\varphi_2}{2}$$

❶ DEFLEXIÓN DE UNA CURVA CIRCULAR CUANDO LA ABSCISA DEL *PC* ES REDONDA Y LA LONGITUD DE LA CURVA, L_c, ES IGUAL A UN NÚMERO EXACTO DE CUERDAS UNIDAD, *c*

Realmente este es un caso poco común, especialmente en lo que respecta a la longitud de la curva. Sin embargo, se ha planteado de esta forma con el propósito de entender más fácilmente el método de las deflexiones.

Se entiende por abscisa redonda, aquella que es múltiplo de la respectiva cuerda unidad que se utilice. Así por ejemplo, para una cuerda unidad de 5 metros una abscisa redonda es el *K2+225*, para 10 metros el *K3+430* y para 20 metros el *K5+680*.

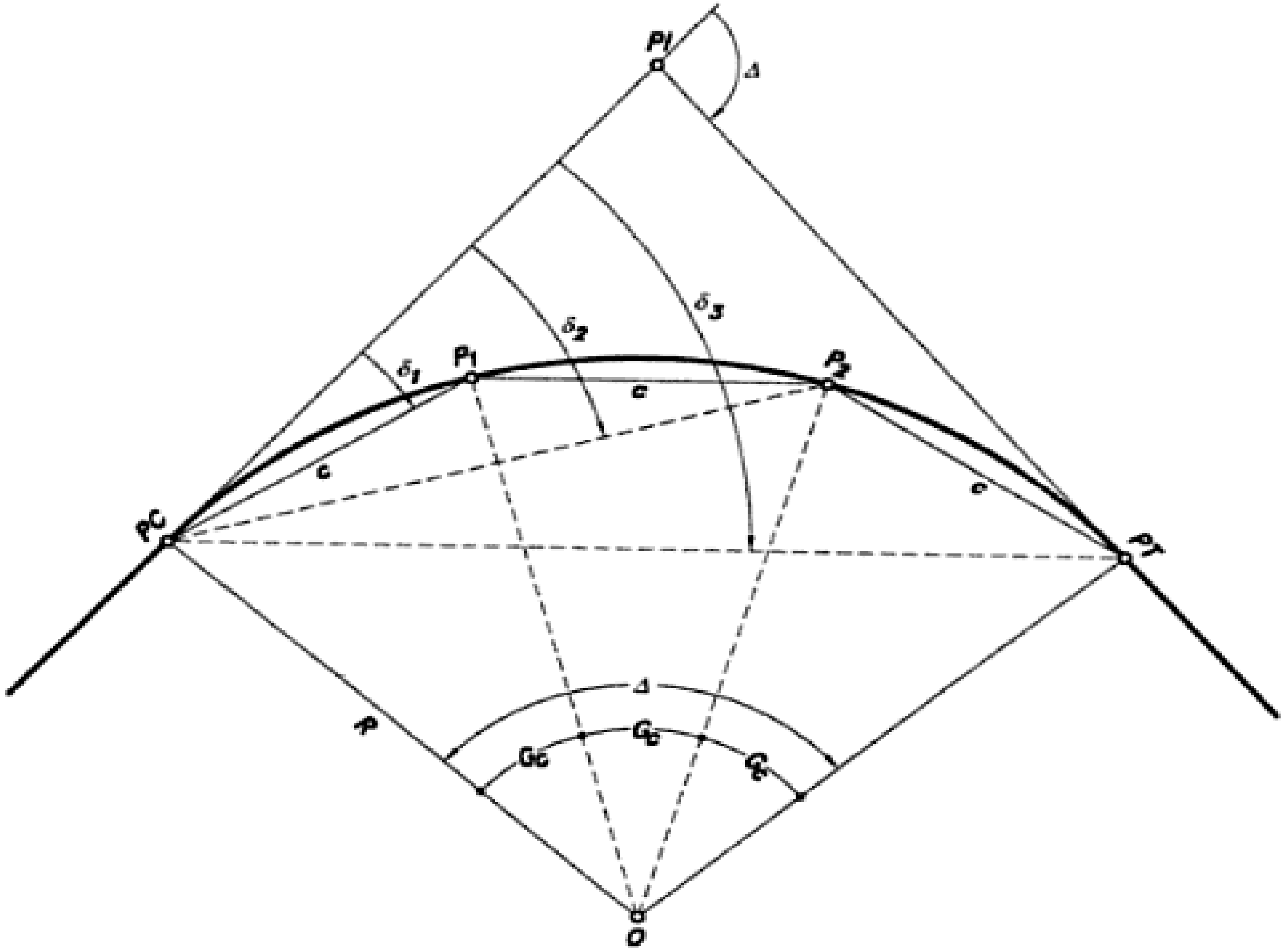
Por lo tanto, de acuerdo a la Figura 3.6, en la que se ha supuesto que la longitud de la curva sea igual a tres (3) cuerdas unidad, se tiene:

Según la ecuación (3-12), la deflexión para la cuerda unidad *c* es:

$$\delta = \frac{G_c}{2}$$

Entonces, para el punto P_1 sobre la curva, la deflexión es:

$$\delta_1 = \frac{G_c}{2}$$



Deflexión de una curva circular. Caso particular

Para localizar el punto P_1 en el campo, se estaciona el tránsito en el *PC* con ceros en la dirección del *PI*. Se deflecta el ángulo δ_1 y en esta dirección se mide la primera cuerda unidad *c*, quedando materializado dicho punto.

Para el punto P_2 la deflexión es:

$$\delta_2 = \frac{G_c + G_c}{2} = \frac{G_c}{2} + \frac{G_c}{2} = \delta_1 + \frac{G_c}{2}$$

De igual manera, para localizar el punto P_2, se marca en el tránsito el ángulo δ_2 y se mide la segunda cuerda *c* desde el punto P_1. La intersección de esta medida con la visual dirigida desde el *PC* materializa este punto.

Para el último punto, el *PT*, la deflexión es:

$$\delta_3 = \frac{G_c + G_c + G_c}{2} = \frac{G_c + G_c}{2} + \frac{G_c}{2} = \left(\delta_1 + \frac{G_c}{2}\right) + \frac{G_c}{2} = \delta_2 + \frac{G_c}{2}$$

Al marcar en el tránsito el ángulo de deflexión δ_3, la dirección de la visual debe coincidir con el *PT* y la distancia $P_2.PT$ debe ser igual a la cuerda unidad *c*. La no-coincidencia e igualdad, identifican la precisión en el cierre de la curva, puesto que el *PT* ha sido previamente localizado desde el *PI*.

Resumiendo:

$$\delta_1 = \frac{G_c}{2}$$

$$\delta_2 = \delta_1 + \frac{G_c}{2}$$

$$\delta_3 = \delta_2 + \frac{G_c}{2} = \frac{3G_c}{2} = \frac{\Delta}{2}$$

De acuerdo con las expresiones anteriores, se puede ver que, la deflexión para cualquier punto sobre la curva es igual a la deflexión para el punto anterior más la deflexión por cuerda unidad $G_c/2$, y que la deflexión al *PT* es igual a $\Delta/2$.

❷ DEFLEXIÓN DE UNA CURVA CIRCULAR CUANDO LA ABSCISA DEL *PC* ES FRACCIONARIA Y LA LONGITUD DE LA CURVA, L_c, NO ES IGUAL A UN NÚMERO EXACTO DE CUERDAS UNIDAD, *c*

Este es el caso más general que se presenta, en el cual al traerse un abscisado desde un cierto origen, se llega al *PC* con una abscisa fraccionaria, por ejemplo el *K2+423.876*. El primer punto de la curva debe situarse en la abscisa redonda inmediatamente superior a la del *PC*, la cual depende de la cuerda unidad que se esté utilizando. Así por ejemplo, para *c=5m* es el *K2+425*, para *c=10m* es el *K2+430* y para *c=20m* es el *K2+440*. La distancia del primer punto al *PC* es la diferencia entre su abscisa redonda y la del *PC*, que para el ejemplo es 1.124m, 6.124m y 16.124m respectivamente. Esto mismo se presenta antes del *PT*.

Como puede observarse, se han originado cuerdas de menor longitud que la cuerda unidad, las cuales se denominan *subcuerdas*, y cuyas deflexiones correspondientes se deben calcular proporcionalmente al valor de la cuerda unidad c. De allí que es necesario determinar la *deflexión por metro* d, así:

$$\frac{G_c}{2} \Rightarrow \text{"c" metros}$$

$$d \Rightarrow \text{"1" metro}$$

De donde,

$$d = \frac{G_c}{2c}$$

Para las diferentes cuerdas unidad de 5m, 10m y 20m, las deflexiones expresadas en grados por metro son:

$$d_5^\circ = \frac{G_c^\circ}{10m} = {}^\circ/m$$

$$d_{10}^\circ = \frac{G_c^\circ}{20m} = {}^\circ/m$$

$$d_{20}^\circ = \frac{G_c^\circ}{40m} = {}^\circ/m$$

También estas deflexiones pueden ser expresadas en minutos por metro:

$$d'_5 = \frac{G_c^\circ}{10m}\left(\frac{60'}{1^\circ}\right) = 6G_c^\circ = {}'/m$$

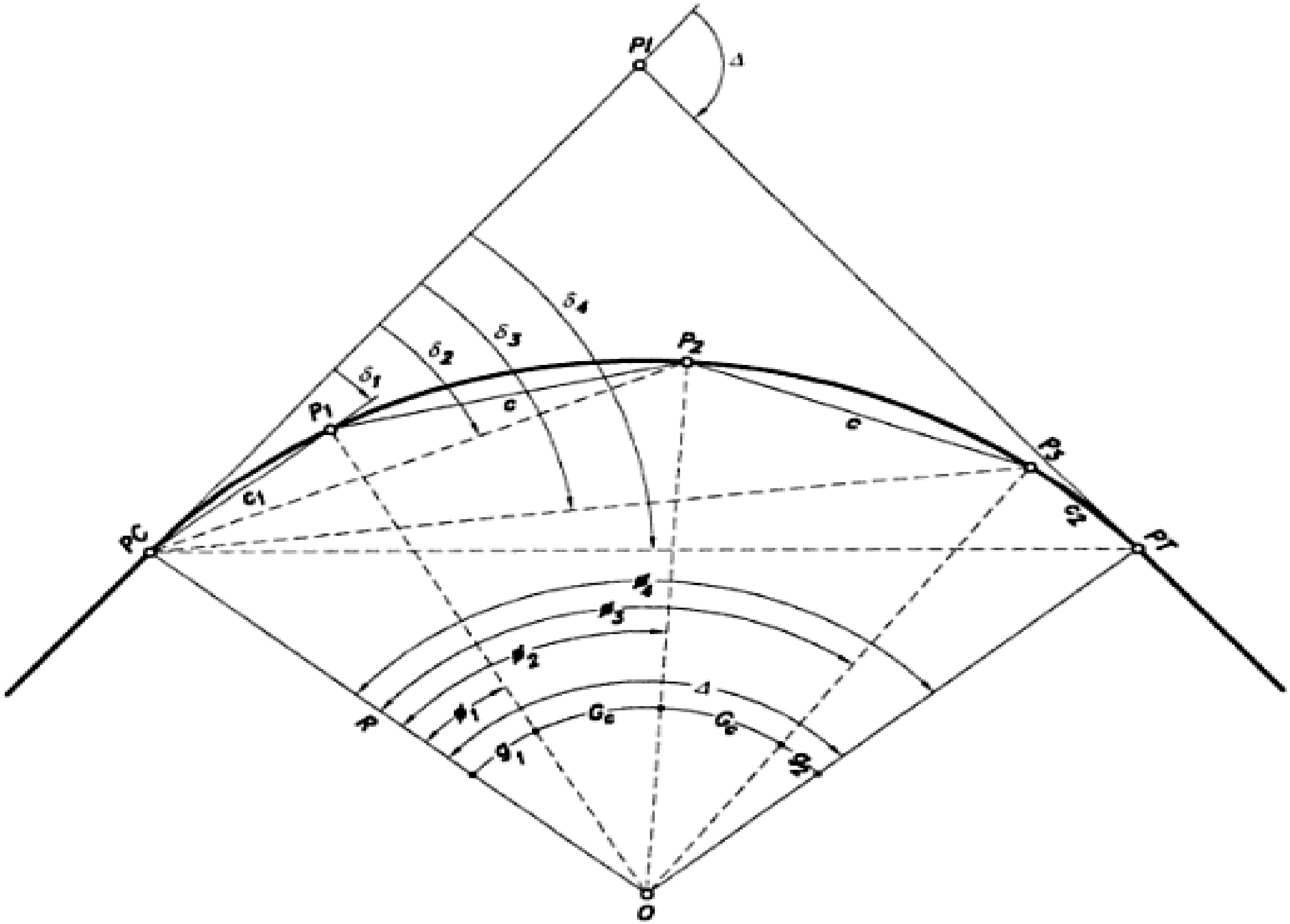
$$d'_{10} = \frac{G_c^\circ}{20m}\left(\frac{60'}{1^\circ}\right) = 3G_c^\circ = {}'/m$$

$$d'_{20} = \frac{G_c^\circ}{40m}\left(\frac{60'}{1^\circ}\right) = 1.5G_c^\circ = {}'/m$$

Conocida la deflexión por metro, la deflexión por subcuerda es:

$$Deflexión\ \ por\ \ subcuerda = (Longitud\ \ subcuerda)(Deflexión\ \ por\ \ metro)$$

Con el propósito de explicar este método general, supóngase que se tiene la curva de la Figura 3.7, trazada con dos subcuerdas c_1 adyacente al *PC* y c_2 adyacente al *PT*, y dos cuerdas unidad c, tal que:



Deflexión de una curva circular. Caso general

Deflexión para: P_1

$$\delta_1 = c_1(d) = c_1\left(\frac{G_c}{2c}\right) = \frac{G_c}{c}\left(\frac{c_1}{2}\right)$$

Pero, $\dfrac{G_c}{c} = \dfrac{g_1}{c_1}$, entonces,

$$\delta_1 = \frac{g_1}{c_1}\left(\frac{c_1}{2}\right)$$, esto es,

$$\delta_1 = \frac{g_1}{2} = \frac{\varphi_1}{2}$$

Deflexión para: P_2

$$\delta_2 = \frac{g_1 + G_c}{2} = \frac{g_1}{2} + \frac{G_c}{2} = \delta_1 + \frac{G_c}{2} = \frac{\varphi_2}{2}$$

Deflexión para: P_3

$$\delta_3 = \frac{g_1 + G_c + G_c}{2} = \left(\frac{g_1}{2} + \frac{G_c}{2}\right) + \frac{G_c}{2} = \delta_2 + \frac{G_c}{2} = \frac{\varphi_3}{2}$$

Deflexión para el: *PT*

$$\delta_4 = \frac{g_1 + G_c + G_c + g_2}{2} = \left(\frac{g_1}{2} + \frac{G_c}{2} + \frac{G_c}{2} \right) + \frac{g_2}{2} = \delta_3 + \frac{g_2}{2} = \frac{\varphi_4}{2} = \frac{\Delta}{2}$$

Esta deflexión se puede expresar también como,

$$\delta_4 = \left(\frac{G_c}{2} + \frac{G_c}{2} \right) + \left(\frac{g_1}{2} + \frac{g_2}{2} \right) = \frac{\Delta}{2}$$

Esta última deflexión dice que,

Deflexión al PT=Deflexión (por cuerdas completas+por subcuerdas)

Y debe ser igual a $\Delta/2$. De nuevo, la no-coincidencia de esta última visual con el *PT* materializado desde el *PI*, indica el error de cierre en ángulo de la curva.